

3.

2桁の正の整数で、2乗した数の下2桁がもとの数と同じになるようなものを、すべて求めよ。  
(小樽商科大)

[解]

求める2桁の正の整数を  $a$  ( $10 \leq a \leq 99$ ) とする

$a^2 = a = a(a-1)$  が100の倍数になればよい。

$$100 = 2^2 \times 5^2$$

$a$  と  $a-1$  がともに2の倍数、

ともに5の倍数となることはない。

また  $10 \leq a \leq 99$  より  $a-1$ 、 $a$  は100の倍数ではないので、

一方が4の倍数で他方が25の倍数である。

$$\begin{array}{r|l} a & \begin{array}{ccc} 0 & \times & \times \\ 25 & 50 & 75 \end{array} \\ \hline a-1 & \begin{array}{ccc} 24 & 49 & 74 \end{array} \\ \hline a-1 & \begin{array}{ccc} \times & \times & 0 \\ 25 & 50 & 75 \end{array} \\ \hline a & \begin{array}{ccc} 26 & 51 & 76 \end{array} \end{array}$$

よって  $a = 25, 76$ 。

[別解]

2桁の正の整数は

$10a+b$  ( $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$ ) とおける

$$(10a+b)^2 - (10a+b)$$

$$= 100a^2 + 20ab + b^2 - 10a - b$$

$$= 100a^2 + 10a(2b-1) + b(b-1) \dots \textcircled{1}$$

が100の倍数となればよい。

① が100の倍数となるためには

1の位が0となることが必要

よって  $b = 5, 6$ 。

$b=5$  のとき

$$10a(2b-1) + b(b-1) = 90a + 20$$

これが100の倍数となるためには  $a=2$

$b=6$  のとき

$$10a(2b-1) + b(b-1) = 110a + 30$$

これが100の倍数となるためには  $a=7$

よって求める整数は 25, 76。