3.

n を自然数，$P(x)$ を n 次の多項式とする．$P(0)$，$P(1)$，$\cdots$，$P(n)$ が整数ならば，すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数であることを証明せよ．（東京工業大）

[解]

(i) $n=1$ のとき

$P(x)=ax+b\ (a\neq 0)$

$P(0)=a,\ P(1)=a+b$

$P(0), P(1)\in\mathbb{Z}$ より $a, b\in\mathbb{Z}$

よって $P(k)=ak+b\in\mathbb{Z}$

(ii) $n=m\ (1\leqq m\leqq n)$ のとき

$P(x)$ を m次多項式として

$P(0), P(1), \cdots, P(m)\in\mathbb{Z}$ ならば

$\forall k\in\mathbb{Z}$ に対して $P(k)\in\mathbb{Z}$ と仮定

$n=m+1$ のとき成り立つことを示す.

$P(x)=cx(x-1)\cdots(x-m)+Q(x)$

$(c\neq 0,\ Q(x)$ は m次以下$)$

とおくと

$P(0)=Q(0), P(1)=Q(1), \cdots, P(m)=Q(m)$ より

$Q(0), Q(1), \cdots, Q(m)\in\mathbb{Z}$

$P(m+1)=c(m+1)!+Q(m+1)$

仮定より $Q(x)$ は m次以下で

$Q(0), Q(1), \cdots, Q(m)\in\mathbb{Z}$ であるから

$Q(m+1)\in\mathbb{Z}$ より

$c(m+1)!=N\in\mathbb{Z}$ とおくと

$\therefore c=\dfrac{N}{(m+1)!}$

$P(k)=\dfrac{N}{(m+1)!}k(k-1)\cdots(k-m)+Q(k)$

$k(k-1)\cdots(k-m)$ は連続 $m+1$ 整数の積であり $(m+1)!$ の倍数より

$\dfrac{N}{(m+1)!}k(k-1)\cdots(k-m)\in\mathbb{Z},\ Q(k)\in\mathbb{Z}$

より $P(k)\in\mathbb{Z}$ よって成り立つ

(i), (ii) から数学的帰納法により題意は示された。