4.

(1) 関数 $f(x)=x\sqrt{2-x}$ の増減を調べ，そのグラフをかけ．

(2) 曲線 $C: y^2=x^2(2-x)$ によって囲まれた部分の面積を求めよ．

（津田塾大）

[解]

(1) $f(x)=x\sqrt{2-x}$

$2-x\geqq 0$ より $x\leqq 2$

$$f'(x)=\sqrt{2-x}+\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}$$

$$=\frac{2(2-x)-1}{2\sqrt{2-x}}$$

$$=\frac{3-2x}{2\sqrt{2-x}}$$

$f'(x)=0$ となるのは $x=\frac{3}{2}$

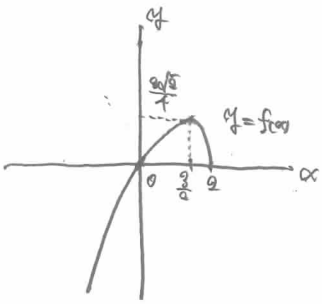
x		$\frac{3}{2}$		2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗	極大	↘	

$x=\frac{3}{2}$ のとき 極大 極大値 $f(\frac{3}{2})=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x\sqrt{2-x}$$

$$=\lim_{t\to\infty}(-t)\sqrt{2+t}\quad(x=-t)$$

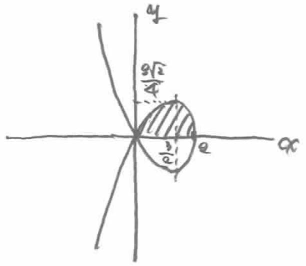
$$=-\infty$$



(2) $y^2=x^2(2-x)$

$y=\pm x\sqrt{2-x}$

$y^2=x^2(2-x)$ は $y=f(x)$ と $y=-f(x)$ を合わせたもの



$y=f(x)$ と $y=-f(x)$ は x軸に関して対称なので求める面積Sは図の斜線部を2倍したもの

$$S=2\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx$$

$$=-2\int_0^2\{(2-x)\sqrt{2-x}-2\sqrt{2-x}\}\,dx$$

$$=-2\left[-\frac{2}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$$=-2\cdot\left(-\frac{16\sqrt{2}}{15}\right)=\frac{32\sqrt{2}}{15}\ //$$