5.

m, n を自然数とする．第 1 象限内の曲線 $x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{n}} = 1$ と x 軸，y 軸とで囲まれる部分の面積を $A(m,n)$ とする．

(1) $A(m,1)$ を求めよ．

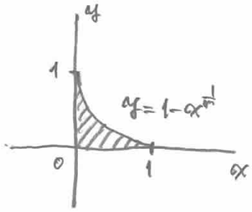
(2) $A(m,n+1) = \dfrac{n+1}{m+1}A(m+1,n)$ であることを示せ．

(3) $A(m,n)$ を求めよ． （東京工業大）

[解]

(1) $n=1$ のとき

$x^{\frac{1}{m}}+y=1$ ∴ $y=1-x^{\frac{1}{m}}$



$$A(m,1)=\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{m}})\,dx$$

$$=\left[x-\frac{m}{m+1}x^{\frac{m+1}{m}}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{m+1} \,/\!/$$

(2) $A(m,n+1)=\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{m}})^{n+1}dx$

$t=1-x^{\frac{1}{m}}$ とおくと $x=(1-t)^m$

$\dfrac{dx}{dt}=-m(1-t)^{m-1}$

$\begin{pmatrix} x: 0 \to 1 \\ t: 1 \to 0 \end{pmatrix}$

$$A(m,n+1)=\int_1^0 t^{n+1}\{-m(1-t)^{m-1}\}dt$$

$$=m\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{m-1}dt$$

∴ $\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{m-1}dt=\dfrac{1}{m}A(m,n+1)$

$\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{m-1}dt$ ← mを1つ上げて nを1つ下げたいから 部分積分

f $-\dfrac{(1-t)^m}{m}$ g t^{n+1}

f' $(1-t)^{m-1}$ g' $(n+1)t^n$

$$=\left[-\frac{t^{n+1}(1-t)^m}{m}\right]_0^1+\frac{n+1}{m}\int_0^1 t^n(1-t)^m dt$$

$$\frac{1}{m}A(m,n+1)=\frac{n+1}{m}\,\frac{1}{m+1}A(m+1,n)$$

∴ $A(m,n+1)=\dfrac{n+1}{m+1}A(m+1,n)$ □

(3) $A(m,n)=\dfrac{n}{m+1}A(m+1,n-1)$ ((2)より)

$$=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}A(m+2,n-2)$$

$$\vdots$$

$$=\frac{m!\,n!}{(m+n-1)!}A(m+n-1,1)$$

$$=\frac{m!\,n!}{(m+n-1)!}\cdot\frac{1}{m+n} \quad \text{((1)より)}$$

$$=\frac{m!\,n!}{(m+n)!} \,/\!/$$